第２講　高次方程式，証明

1　［1］　a，b，c，d は正の実数で $a \geqq b \geqq c+d$ とするとき，$ad+bc$ と ab との大小を調べよ．

［2］　$f(x)=x^3-3x+1$ とおき，3 次方程式 $f(x)=0$ の 1 つの解を α とする．

(1)　$f(\alpha^2-2)$ の値を求めよ．

(2)　2 次方程式 $x^2-\alpha x+1=0$ の 1 つの解を β とするとき，$\beta^3+\dfrac{1}{\beta^3}$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　2次方程式 $x^2+px+q=0$ の1つの解が他の解の3乗になるためには

$$p^2(p^2-4q)=q(q-1)^2$$

が必要十分条件であることを証明せよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a，b，c は $a^2-3b^2=c^2$ を満たす整数とするとき，次のことを証明せよ．

(1)　a，b の少なくとも一方は偶数である．

(2)　a，b が共に偶数なら，少なくとも一方は 4 の倍数である．

(3)　a が奇数なら b は 4 の倍数である．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　高次方程式，証明

1　［1］　a，b，c，d は正の実数で $a \geqq b \geqq c+d$ とするとき，$ad+bc$ と ab との大小を調べよ.

$a \geqq b \geqq c+d>0$ のとき　$ab \geqq a(c+d)=ac+ad \geqq bc+ad$

等号成立は　$a=b=c+d$ のとき　　ゆえに　$\boldsymbol{ab \geqq ad+bc}$

1　［2］　$f(x)=x^3-3x+1$ とおき，3 次方程式 $f(x)=0$ の 1 つの解を α とする.

(1)　$f(\alpha^2-2)$ の値を求めよ.

(2)　2 次方程式 $x^2-\alpha x+1=0$ の 1 つの解を β とするとき，$\beta^3+\dfrac{1}{\beta^3}$ の値を求めよ.

$f(x)=x^3-3x+1=0$ の解の 1 つが α より　$\alpha^3-3\alpha+1=0$

(1)　$f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)=\mathbf{0}$

(2)　$x^2-\alpha x+1=0$ の解の 1 つが $\beta\ (\neq 0)$ より　$\beta^2-\alpha\beta+1=0$　　$\beta-\alpha+\dfrac{1}{\beta}=0$　　$\beta+\dfrac{1}{\beta}=\alpha$

よって　$\beta^3+\dfrac{1}{\beta^3}=\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)^3-3\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)=\alpha^3-3\alpha=\mathbf{-1}$

2　2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 1 つの解が他の解の 3 乗になるためには

$$p^2(p^2-4q)=q(q-1)^2$$

が必要十分条件であることを証明せよ.

2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 2 解が α，α^3 のとき，解と係数の関係より

$\alpha+\alpha^3=-p$，$\alpha\cdot\alpha^3=q$

このとき

$$p^2(p^2-4q)=(\alpha+\alpha^3)^2\{(\alpha+\alpha^3)^2-4\alpha^4\}=\{\alpha(\alpha^2+1)\}^2\{(\alpha^3+\alpha+2\alpha^2)(\alpha^3+\alpha-2\alpha^2)\}$$
$$=\alpha^4(\alpha^2+1)^2(\alpha+1)^2(\alpha-1)^2$$

$$q(q-1)^2=\alpha^4(\alpha^4-1)^2=\alpha^4(\alpha^2+1)^2(\alpha+1)^2(\alpha-1)^2$$

よって　$p^2(p^2-4q)=q(q-1)^2$ が成り立つ.

逆に　$p^2(p^2-4q)=q(q-1)^2$　……①　が成り立つとき，$x^2+px+q=0$ の 2 解を α，β とすると

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$　これらを①に代入して

$$(\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=\alpha\beta(\alpha\beta-1)^2$$

(左辺)$=(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2=\{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\}^2=(\alpha^2-\beta^2)^2=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4$

(右辺)$=\alpha\beta(\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta+1)=\alpha^3\beta^3-2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta$

よって　$\alpha^4+\beta^4=\alpha^3\beta^3+\alpha\beta$　　$\alpha^3(\alpha-\beta^3)-\beta(\alpha-\beta^3)=0$　　$(\alpha-\beta^3)(\alpha^3-\beta)=0$

したがって，$\alpha=\beta^3$　または　$\beta=\alpha^3$　より，1 解が他の解の 3 乗となる.

以上より必要十分条件であることが示された.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a，b，c は $a^2-3b^2=c^2$ を満たす整数とするとき，次のことを証明せよ．

(1)　a，b の少なくとも一方は偶数である．

(2)　a，b が共に偶数なら，少なくとも一方は 4 の倍数である．

(3)　a が奇数なら b は 4 の倍数である．

$a^2-3b^2=c^2$　……①　以下 l，m，n を整数とする．

(1)　a，b がともに奇数のとき $a=2m+1$，$b=2n+1$　とおくと

$$a^2-3b^2=(2m+1)^2-3(2n+1)^2=4(m^2+m-3n^2-3n-1)+2$$

よって，a^2-3b^2 は 4 で割ると 2 余る数である．

c が偶数 ($c=2l$) のとき　$c^2=4l^2$　これは，4 で割り切れる数

c が奇数 ($c=2l+1$) のとき　$c^2=4(l^2+l)+1$　これは，4 で割ると 1 余る数

よって，$a^2-3b^2=c^2$ であることに反する．ゆえに背理法により題意は示された．

(2)　a，b が共に偶数のとき　$a=2m$，$b=2n$　とおくと

①より　$4(m^2-3n^2)=c^2$

よって，c^2 は 4 の倍数となり(1)より c は偶数　　よって，$c=2l$ とおける

このとき　$4(m^2-3n^2)=(2l)^2$　　$m^2-3n^2=l^2$

したがって，(1)より m，n の少なくとも一方は偶数

ゆえに，a，b は少なくとも一方が 4 の倍数である．

(3)　a が奇数のとき(1)より b は偶数である．よって　$a=2m+1$，$b=2n$ とおく．

①より　$(2m+1)^2-3(2n)^2=c^2$　　よって　$c^2=4(m^2+m-3n^2)+1$

(1)より，c は奇数である．よって，$c=2l+1$ とおける．

このとき　$(2l+1)^2=4(m^2+m-3n^2)+1$

つまり　$3n^2=m^2+m-l^2-l=m(m+1)-l(l+1)$

隣接 2 整数の積は偶数である．よって n^2 は偶数より整数 n は偶数である．

ゆえに b は 4 の倍数である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$x \geqq 0$，$y > 0$，$z \geqq 0$，$a > b > c$ で $(x+y+z)^2 = ax+by+cz$ とする．$S = x+y+z$ とおくとき，S，a，c を大きい順に並べよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　t を 0 でない実数とし，2 次方程式 $x^2-tx+5t=0$ を考える．

(1)　$x^2-tx+5t=0$ の解 α，β が $\alpha^5+\beta^5=t^5$ を満たすとする．このときの t の値を求めよ．

(2)　$x^2-tx+5t=0$ が虚数解をもち，その 5 乗が実数になるとする．このときの t の値を求めよ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

東北大数学ⅠＡⅡＢ　第２講　高次方程式，証明　練習問題 解答

1 $x \geqq 0$，$y>0$，$z \geqq 0$，$a>b>c$ で $(x+y+z)^2=ax+by+cz$ とする．$S=x+y+z$ とおくとき，S，a，c を大きい順に並べよ．

解答例

$(x+y+z)^2=ax+by+cz$ より　$S^2=ax+by+cz$

$a>c$，$x \geqq 0$ より　$ax \geqq cx$

$b>c$，$y>0$ より　$by>cy$

← **大小関係を用いて「下げる」ための準備**

よって　$ax+by+cz>cx+cy+cz=c(x+y+z)=cS$

← **実際に「下げた」**

$b<a$，$y>0$ より　$by<ay$

$c<a$，$z \geqq 0$ より　$cz \leqq az$

よって　$ax+by+cz<ax+ay+az=a(x+y+z)=aS$

← **「上げた」**

したがって　$aS>ax+by+cz>cS$　　すなわち　$aS>S^2>cS$

ゆえに　$a>S>c$ より　大きい順に $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{c}$

問題の条件から $(x+y+z)^2$ つまり「S^2」を他のものと比較することがわかる．$S<a \Leftrightarrow S^2<aS$ であるから，「S^2」と aS との大小比較であることも予測がつく．
あとは，どのように $ax+by+cz$ を aS すなわち $a(x+y+z)=ax+ay+az$ に「下げる」または「上げる」かを，問題の大小条件に照らし合わせて考えればよい．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 t を 0 でない実数とし，2 次方程式 $x^2-tx+5t=0$ を考える．

(1) $x^2-tx+5t=0$ の解 α, β が $\alpha^5+\beta^5=t^5$ を満たすとする．このときの t の値を求めよ．

(2) $x^2-tx+5t=0$ が虚数解をもち，その 5 乗が実数になるとする．このときの t の値を求めよ．

解答例

(1) $x^2-tx+5t=0$ の 2 解が α，β であることより，

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=t$，$\alpha\beta=5t$

このとき

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=t^2-10t$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=t^3-15t^2$$

よって　$\alpha^5+\beta^5=(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

$=(t^3-15t^2)(t^2-10t)-(5t)^2\cdot t$

$=t^5-25t^4+125t^3$

$\alpha^5+\beta^5=t^5$ より　$-25t^4+125t^3=0$

$t\neq0$ より　$\boldsymbol{t=5}$

(2) $x^2-tx+5t=0$ が虚数解をもつとき，$t^2-20t<0$　よって　$0<t<20$

このとき，$x^2-tx+5t=0$ の虚数解の 1 つを α とすると

$\alpha^2-t\alpha+5t=0$　　よって　$\alpha^2=t\alpha-5t$

$\alpha^4=(t\alpha-5t)^2=t^2\alpha^2-10t^2\alpha+25t^2=t^2(t\alpha-5t)-10t^2\alpha+25t^2$ ←「下げた」

$=(t^3-10t^2)\alpha-5t^3+25t^2$

$\alpha^5=(t^3-10t^2)\alpha^2+(-5t^3+25t^2)\alpha$

$=(t^3-10t^2)(t\alpha-5t)+(-5t^3+25t^2)\alpha$

$=(t^4-15t^3+25t^2)\alpha-5t^4+50t^3$

t は実数であることより，これが実数になるのは $t^4-15t^3+25t^2=0$ のとき

$t\neq0$ より　$t^2-15t+25=0$　　ゆえに　$\boldsymbol{t=\dfrac{15\pm5\sqrt{5}}{2}}$　($0<t<20$ を満たす)

今回は「5 乗」の値を扱うということで，「式で割る」，すなわち「筆算」による次数下げは選択していないが，「方程式の解」であることを利用して次数を下げたことにかわりはない．筆算による方法も含め常に選択肢に入れておくように．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。